# Ciągi arytmetyczne w geometrii

*Rafał Świetlicki*

Jeżeli trójkąt prostokątny jest podobny do trójkąta o bokach długości 3, 4, 5, to długości jego boków tworzą ciąg arytmetyczny.

**Problem 1.**
**Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne do powyższego?**
Przyjmijmy, że mamy do czynienia z trójkątem prostokątnym o bokach długości $x-r, x, x+r,$ gdzie $x>r>0$. Z twierdzenia Pitagorasa dostajemy: $(x-r)^2+x^2=(x+r)^2$, czyli $x=4r$. A zatem otrzymujemy trójkąt o bokach długości $3r, 4r, 5r,$ czyli trójkąt podobny do trójkąta o bokach długości 3, 4, 5.

**Problem 2.**
**Scharakteryzować trójkąty, których długości boków tworzą ciąg arytmetyczny.**
Do zbioru takich trójkątów będą oczywiście należały trójkąty równoboczne.
Przyjmijmy zatem, że mamy do czynienia z trójkątem o bokach długości $x-r, x, x+r,$ gdzie $x>r>0$, i że miara największego kąta takiego trójkąta ma ustaloną wartość $\gamma>\frac{\pi}{3}$.
Z twierdzenia cosinusów dostajemy:

$$(x+r)^2=x^2+(x-r)^2-2x(x-r)\cos\gamma$$
$$4rx=x^2-2x(x-r)\cos\gamma$$
$$4r-2r\cos\gamma=x-2x\cos\gamma$$
$$x=\frac{2r(2-\cos\gamma)}{1-2\cos\gamma}$$

Wówczas:

$$x-r=\frac{2r(2-\cos\gamma)}{1-2\cos\gamma}-r=\frac{4r-2r\cos\gamma-r+2r\cos\gamma}{1-2\cos\gamma}=\frac{3r}{1-2\cos\gamma},$$
$$x+r=\frac{2r(2-\cos\gamma)}{1-2\cos\gamma}+r=\frac{4r-2r\cos\gamma+r-2r\cos\gamma}{1-2\cos\gamma}=\frac{r(5-4\cos\gamma)}{1-2\cos\gamma}.$$

Zatem każdy kąt $\gamma>\frac{\pi}{3}$ wyznacza zbiór trójkątów podobnych do trójkąta o bokach długości:
$\frac{3}{1-2\cos\gamma}, \frac{4-2\cos\gamma}{1-2\cos\gamma}, \frac{5-4\cos\gamma}{1-2\cos\gamma}$ tworzących ciąg arytmetyczny.

**Przykład. (Zadanie nr 5 z tegorocznej Olimpiady Matematycznej)**

Liczby *a; b; c* są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. Ponadto, są one długościami boków pewnego trójkąta, w którym jeden z kątów ma miarę 120°. Udowodnić, ze trójkąt ten jest podobny do trójkąta o bokach długości 3, 5, 7.

Przyjmując $\gamma=120^\circ$ dostajemy:

$$\frac{3}{1-2\cos\gamma}=\frac{3}{2},\ \frac{4-2\cos\gamma}{1-2\cos\gamma}=\frac{5}{2},\ \frac{5-4\cos\gamma}{1-2\cos\gamma}=\frac{7}{2}.$$

**Problem 3.**
**Długości boków trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny o wyrazach całkowitych. Kiedy pole takiego trójkąta będzie również liczbą całkowitą?**

Oczywiści trójkąt równoboczny nie spełnia tego warunku. Przyjmijmy zatem, że mamy do czynienia z trójkątem o bokach długości $x-r,\ x,\ x+r,$ gdzie $x>r>0$, $x,r\in C$. Wówczas:

$p=\frac{3}{2}x$, $p-a=\frac{1}{2}x+r$, $p-b=\frac{1}{2}x$, $p-c=\frac{1}{2}x+r$ oraz:

$P=\sqrt{\frac{3}{4}x^2\left(\frac{1}{4}x^2-r^2\right)}=\frac{x}{4}\sqrt{3\left(x^2-4r^2\right)}$. Musi zatem zachodzić równość $x^2-4r^2=3y^2$, gdzie $y$ jest pewną liczbą całkowitą dodatnią. Będziemy szukać liczb $x,y$ w postaci: $x=2ru,\ y=2rv$, gdzie $u,v$ będą pewnymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Wtedy $P=3r^2uv$.

$$x^2-4r^2=3y^2$$
$$4r^2u^2-4r^2=12r^2v^2\ .$$
$$u^2-1=3v^2$$

Zatem liczby $u,v$ to rozwiązania równania Pella $u^2-3v^2=1$, o którym pisałem w artykule " Wyznaczanie wzoru rekurencyjnego ciągu z wykorzystaniem narzędzi technologii informacyjnej (Excel, C++)". Początkowe pary liczb całkowitych dodatnich spełniających to równanie to: (2,1), (7,4), (26,15), ... .
Gdy $u=2$, to $x=4r$ i dostajemy trójkąty prostokątne o bokach długości $3r,\ 4r,\ 5r$ i polu $P=6r^2$.
Gdy $u=7$, to $x=14r$ i dostajemy trójkąty o bokach długości $13r, 14r, 15r$ i polu $P=84r^2$.