Podzielność w zbiorze liczb całkowitych.

Tak, jak matematykę traktuje się jako królową nauk, podobnie teorię liczb traktuje się jako królową matematyki. Najpopularniejszymi zadaniami z teorii liczb zarówno na egzaminie maturalnym jak i konkursach matematycznych są zadania z zakresu podzielności. W artykule tym postarałem się zebrać najistotniejsze fakty z zakresu podzielności pozwalające uczniom opanować tę niełatwą tematykę.

Na początku krótkie przypomnienie.

* Zbiór liczb naturalnych: $N = \{0, 1, 2, ...\}$.
* Zbiór liczb całkowitych: $C = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$.
* Zbiór liczb całkowitych dodatnich: $C_+ = \{1, 2, 3, ...\}$.
* Wybrane wzory skróconego mnożenia:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

* Mówimy, że liczba całkowita n jest podzielna przez liczbę całkowitą k różną od zera, jeżeli liczbę n można zapisać jako iloczyn liczby k i pewnej liczby całkowitej.
* Mówimy, że liczba naturalna większa niż 1 jest liczbą pierwszą, jeżeli jest podzielna tylko przez 1 i samą siebie. Początkowe liczby pierwsze to $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$.
* Suma, różnica i iloczyn liczb całkowitych jest zawsze liczbą całkowitą. Jeżeli zatem $k \in C$, to do zbioru C należą również na przykład liczby: $4k^3, k-7, k^2 + 5k$, itd.

Przykład.
Liczba 731 jest podzielna przez liczbę 43, gdyż liczbę 731 można zapisać jako iloczyn liczby 43 i pewnej liczby całkowitej, w tym przypadku liczby 17, czyli $731 = 43 \cdot 17$.
Przykład.
Liczba całkowita n jest podzielna przez 2 (jest liczbą parzystą), jeżeli liczbę n można zapisać jako iloczyn liczby 2 i pewnej liczby całkowitej, czyli $n = 2 \cdot s, s \in C$.
Przykład.
Liczba całkowita n jest podzielna przez 7, jeżeli liczbę n można zapisać jako iloczyn liczby 7 i pewnej liczby całkowitej, czyli $n = 7 \cdot s, s \in C$.

Ćwiczenie.
Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych pomniejszona o 2 jest liczbą podzielną przez 3.
Rozwiązanie.
Jeżeli przyjmiemy, że wśród tych trzech kolejnych liczb całkowitych najmniejsza jest równa n, to będą to liczby: $n, n+1, n+2$. Musimy zatem wykazać, że liczba $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 - 2$ jest podzielna przez 3, czyli że można ją zapisać jako iloczyn liczby 3 i pewnej liczby całkowitej:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 - 2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 - 2 = 3n^2 + 6n + 3 = 3 \cdot (n^2 + 2n + 1).$$

Ponieważ liczba $n^2 + 2n + 1$ jest całkowita, gdyż liczba n jest całkowita, więc podzielność została wykazana.

* Mówimy, że liczba całkowita n nie jest podzielna przez liczbę całkowitą k, jeżeli z dzielenia przez liczbę k daje resztę równą 1 lub 2 lub ... lub $k-1$.

Przykład.
Liczba całkowita n nie jest podzielna przez liczbę 4, jeżeli z dzielenia przez 4 daje resztę równą 1 lub 2 lub 3. Wówczas liczbę n można zapisać w postaci: $n=4\cdot s+1$ lub $n=4\cdot s+2$ lub $n=4\cdot s+3$, gdzie $s\in C$.
Przykład.
Liczba całkowita n nie jest podzielna przez liczbę 2 (jest liczbą nieparzystą), jeżeli z dzielenia przez 2 daje resztę równą 1. Wówczas liczbę n można zapisać w postaci: $n=2\cdot s+1$, gdzie $s\in C$.

Ćwiczenie.
Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest liczbą podzielną przez 8.
Rozwiązanie.
Dwie kolejne liczby nieparzyste różnią się o 2. Zatem, jeżeli jedną z nich jest liczba $n=2\cdot s+1$, to drugą liczba $n+2=2\cdot s+3$. Musimy więc wykazać, że liczbę $(2s+3)^2-(2s+1)^2$ można zapisać jako iloczyn liczby 8 i pewnej liczby całkowitej:
$(2s+3)^2-(2s+1)^2=4s^2+12s+9-4s^2-4s-1=8s+8=8\cdot(s+1)$.
Ponieważ liczba $s+1$ jest całkowita, gdyż liczba s jest całkowita, więc podzielność została wykazana.
Ćwiczenie.
Wykaż, że jeżeli liczba całkowita n nie jest podzielna przez 3, to kwadrat liczby n z dzielenia przez 3 daje resztę 1.
Rozwiązanie.
Liczba całkowita n nie jest podzielna przez 3, jeżeli z dzielenia przez 3 daje resztę równą 1 lub 2. Wówczas liczbę n można zapisać w postaci: $n=3\cdot s+1$ lub $n=3\cdot s+2$, gdzie $s\in C$.
Przypadek I: $n=3\cdot s+1$.
Wtedy: $n^2=(3s+1)^2=9s^2+6s+1=3\cdot(3s^2+2s)+1$. Oznacz to, że liczba n z dzielenia prze 3 daje resztę 1.
Przypadek II: $n=3\cdot s+2$.
Wtedy: $n^2=(3s+2)^2=9s^2+12s+4=9s^2+12s+3+1=3\cdot(3s^2+4s+1)+1$. Oznacz to, że liczba n z dzielenia prze 3 również daje resztę 1.

* Wśród dwóch kolejnych liczb całkowitych jest jedna liczba parzysta i jedna nieparzysta.
* Jeżeli n jest liczbą całkowitą większą niż 2, to wśród n kolejnych liczb całkowitych jest przynajmniej jedna liczba podzielna przez 2, przynajmniej jedna podzielna 3, ..., przynajmniej jedna podzielna przez n.
* Jeżeli liczba całkowita n jest podzielna przez liczbę całkowitą k, to każdy iloczyn liczb całkowitych, wśród których jest liczba n jest również podzielny przez liczbę k.

Ćwiczenie.
Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba n^2+n jest parzysta.
Rozwiązanie.
Ponieważ $n^2+n=n\cdot(n+1)$, zaś n oraz $n+1$ to dwie kolejne liczby całkowite, więc jedna z nich jest parzysta. Zatem skoro jedna liczb: n lub $n+1$ jest podzielna przez 2, to ich iloczyn $n\cdot(n+1)=n^2+n$ jest również podzielny przez 2 czyli jest liczbą parzystą.
Ćwiczenie.
Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba n^3-n jest podzielna przez 6.
Rozwiązanie.
Ponieważ $n^3-n=n\cdot(n^2-1)=n\cdot(n^2-1^2)=n\cdot(n-1)\cdot(n+1)$, zaś $n-1$ oraz n oraz $n+1$ to trzy kolejne liczby całkowite, więc jedna z nich jest podzielna przez 2 oraz jedna z nich jest podzielna przez 3. Zatem iloczyn tych liczb $n\cdot(n-1)\cdot(n+1)=n^3-n$ jest podzielny jednocześnie przez 2 i przez 3 czyli również przez $2\cdot3=6$.

Ćwiczenie.
Wykaż, że jeżeli liczba całkowita n nie jest podzielna przez 3, to liczba n^2-1 jest podzielna przez 3.
Rozwiązanie.
Ponieważ $n-1$ oraz n oraz $n+1$ to trzy kolejne liczby całkowite, więc jedna z nich jest podzielna przez 3. Skoro nie jest to liczba n, więc musi być to liczba $n-1$ albo $n+1$. Zatem iloczyn $(n-1)\cdot(n+1)=n^2-1$ jest podzielny przez 3.

Ćwiczenie.
Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba n^3+3n^2-10n jest podzielna przez 3.
Rozwiązanie.
Rozłożymy najpierw liczbę n^3+3n^2-10n na czynniki: $n^3+3n^2-10n=n(n+5)(n-2)$. Liczba $n+5$ daje z dzielenia przez 3 taką samą resztę jak liczba $n-1$, gdyż $n+5-(n-1)=6$ - liczba podzielna przez 3. Analogicznie liczba $n-2$ daje z dzielenia przez 3 taką samą resztę jak liczba $n+1$, gdyż $n+1-(n-2)=3$ - liczba podzielna przez 3. Zatem liczba $n^3+3n^2-10n=n(n+5)(n-2)$ daje z dzielenia przez 3 taką samą resztę jak liczba jak liczba $n(n-1)(n+1)$, która jako iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.

* Jeżeli suma albo różnica dwóch liczb całkowitych jest podzielna przez liczbę całkowitą k i jedna z tych liczb jest podzielna przez k, to druga liczba również jest podzielna przez k.
* Jeżeli iloczyn pewnej ilości liczb całkowitych jest podzielny przez liczbę pierwszą p, to co najmniej jedna z tych liczb całkowitych jest podzielna przez p.

Ćwiczenie.
Wykaż, że jeżeli suma siedmiu kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3, to najmniejsza z tych liczb też jest podzielna przez 3.
Rozwiązanie.
Siedem kolejnych liczb całkowitych to liczby: $n, n+1, ..., n+6$. Ich suma jest równa $7n+21$. Ponieważ ta suma jest podzielna przez 3 oraz liczba 21 jest podzielna przez 3, to liczba $7n$ też jest podzielna przez 3. Ale skoro liczba 7 nie jest podzielna przez 3, zatem musi być podzielna przez 3 liczba n, czyli najmniejsza z tych siedmiu liczb.

I jeszcze podzielność w przypadku potęg.

Ćwiczenie.
Wykaż, że liczba $3\cdot 5^{85}+2\cdot 5^{86}+5^{87}$ jest podzielna przez 19.
Rozwiązanie.
Wyłączamy przed nawias potęgę z najniższym wykładnikiem:
$3\cdot 5^{85}+2\cdot 5^{86}+5^{87}=5^{85}\left(3+2\cdot 5+5^2\right)=5^{85}\cdot 38$.
Ponieważ liczba 38 jest podzielna przez 19, zatem liczba $3\cdot 5^{85}+2\cdot 5^{86}+5^{87}$ też jest podzielna przez 19.

Ćwiczenie.
Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowite dodatniej n liczba $4^n+4^{n+1}+4^{n+2}$ jest podzielna przez 14.
Rozwiązanie.
$4^n+4^{n+1}+4^{n+2}=4^n\left(1+4^1+4^2\right)=4^n\cdot 21$,
Ponieważ liczba 4^n jest parzysta, zaś liczba 21 jest podzielna przez 7, zatem liczba $4^n+4^{n+1}+4^{n+2}$ jest podzielna przez 14.

Przykładowe zadania do samodzielnego rozwiązania:
Zad. 1. Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą.
Zad. 2. Wykaż, że iloczyn dwóch kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 8.
Zad. 3. Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, z których pierwsza jest parzysta jest podzielny przez 24.
Zad. 4. Wykaż, że kwadrat liczby nieparzystej pomniejszony o 1 jest podzielny przez 8.

Zad. 5. Wykaż, że jeżeli żadna z dwóch liczb całkowitych nie jest podzielna przez 3, to suma albo różnica tych liczb jest podzielna przez 3.
Zad. 6. Wykaż, że jeżeli liczba całkowita nie jest podzielna przez 5, to kwadrat tej liczby z dzielenia przez 5 daje resztę równą 1 albo 4.
Zad. 7. Wykaż, że suma trzecich potęg dwóch kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 8.
Zad. 8. Wykaż, że jeżeli n jest liczbą całkowitą i liczba $n^2 - 1$ nie jest podzielna przez 5, to liczba $n^3 - 4n$ jest podzielna przez 5.
Zad. 9. Wykaż, że jeżeli jedna liczba całkowita z dzielenia przez 5 daje resztę 2, a druga 3, to iloczyn tych liczb z dzielenia przez 5 daje resztę 1.
Zad. 10. Długości boków czworokąta wyrażają się czterema kolejnymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Wykaż, że jeżeli obwód tego trójkąta jest podzielny przez 3, to długość najkrótszego i najdłuższego boku też jest podzielna przez 3.
Zad. 11. Wykaż, że iloczyn dwóch kolejnych liczb nieparzystych z dzielenia przez 4 daje resztę 3.
Zad. 12. Wykaż, że liczba $4 \cdot 7^{84} + 3 \cdot 7^{85} + 7^{86}$ jest podzielna przez 37.