Nie taka kombinatoryka straszna ...

Rafał Świetlicki

Rozpoczynając realizację działu "Elementy kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa" już niejednokrotnie zauważyłem, że uczniowie po pierwszej lekcji z tego działu wychodzili z sali przerażeni. Również w trakcie przygotowań do egzaminu maturalnego z matematyki w zakresie podstawowym wielu uczniów stwierdza, że jeżeli w treści zadania pojawia się zwrot "wykaż, że", albo "na ile sposobów można", to pomija te zadania. Długo zastanawiałem się, w jaki sposób wprowadzić uczniom "w miarę bezboleśnie" ten dział, jak przekonać ich, że kombinatoryka nie jest aż tak straszna i przyszło mi do głowy, aby pogrupować zadania i połączyć je w modele kombinatoryczne. Wówczas uczeń będzie przede wszystkim musiał dopasować zadanie do modelu i znając zasadę obliczeniową ilości możliwości w danym modelu rozwiązać dane zadanie. Wygląda to następująco:

Model I. Wybór jednego elementu z niepustego zbioru.
Twierdzenie. Z niepustego zbioru jeden element można wybrać na tyle sposobów, ile elementów liczy ten zbiór.

Zadanie 1. W klasie jest 17 dziewcząt i 12 chłopców. Na ile sposobów w tej klasie można wybrać:
a) jedną dziewczynę;
b) jednego chłopca;
c) jedną osobę?

Rozwiązanie.
Zgodnie z powyższym twierdzeniem:
a) jedną dziewczynę można wybrać na 17 sposobów;
b) jednego chłopca można wybrać na 12 sposobów;
c) jedną osobę można w tej klasie wybrać na 29 sposobów (17+12).

Model II. Wybór dwóch elementów z niepustego zbioru (kolejność wybieranych elementów nie jest dla nas istotna).
Twierdzenie. Z niepustego zbioru liczącego n elementów dwa elementy, których kolejność nie jest istotna można wybrać na $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ sposobów.

Zadanie 1. W klasie jest 17 dziewcząt i 12 chłopców. Na ile sposobów w tej klasie można wybrać dwuosobową delegację złożoną z:
a) dwóch dziewcząt;
b) dwóch chłopców?

Rozwiązanie.
Wybierając dwuosobową delegację kolejność wybieranych osób nie jest istotna, ponieważ są to po prostu dwie osoby, które mają załatwić nam jakąś sprawę.
Zgodnie z powyższym twierdzeniem:
a) dwuosobową delegację złożoną z dwóch dziewcząt można wybrać na $\frac{17\cdot(17-1)}{2}=\frac{17\cdot 16}{2}=136$ sposobów;
b) dwuosobową delegację złożoną z dwóch chłopców można wybrać na $\frac{12\cdot(12-1)}{2}=\frac{12\cdot 11}{2}=66$ sposobów.

Zadanie 2. Wśród siedmiu osób każde dwie uścisnęły sobie dłonie. Ile było wszystkich uścisków?

Rozwiązanie.
Żeby otrzymać jeden uścisk należy spośród tych siedmiu osób wybrać dwie, które uścisną sobie dłonie. Bez względu na to, czy osoba X uściśnie dłoń osobie Y, czy na odwrót, jest to jeden i ten sam uścisk dłoni, zatem kolejność wybieranych elementów nie jest istotna. Ilość wszystkich uścisków będzie więc równa $\frac{7\cdot(7-1)}{2}=\frac{7\cdot 6}{2}=21$.

Model III. Wybór dwóch elementów z niepustego zbioru (kolejność wybieranych elementów jest dla nas istotna).
Twierdzenie. Z niepustego zbioru liczącego n elementów dwa elementy, których kolejność jest istotna można wybrać na $n\cdot(n-1)$ sposobów.

Zadanie 1. Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych o różnych cyfrach należących do zbioru: $\{1, 2, 4, 7, 8\}$?

Rozwiązanie.
Żeby utworzyć taką liczbę musimy z powyższego 5 - cio elementowego zbioru wybrać dwa różne elementy (liczby mają być o różnych cyfrach), przy czym na przykład liczby 47 i 74 to dwie różne liczby, zatem kolejność wybieranych elementów jest istotna. Zgodnie z powyższym twierdzeniem liczb takich będzie $n\cdot(n-1)=5\cdot(5-1)=20$.

Zadanie 2. Na ile sposobów w komisji wyborczej liczącej 8 członków można wybrać przewodniczącego i jego zastępcę?

Rozwiązanie.
Ze zbioru liczącego 8 osób musimy wybrać dwie, przy czym jeżeli osoba X zostanie wybrana przewodniczącym a osoba Y zastępcą, albo jeżeli osoba Y zostanie wybrana przewodniczącym a osoba X zastępcą, to są to dwa różne prezydia tej komisji, zatem kolejność wybieranych elementów jest istotna. Zgodnie z powyższym twierdzeniem wyboru takiego można dokonać na $n\cdot(n-1)=8\cdot(8-1)=56$ sposobów.

Model IV. Wybór k razy jednego elementu z niepustego zbioru, przy czym wybrany element wraca do zbioru (jest to tak zwane losowanie ze zwracaniem).
Twierdzenie. Z niepustego zbioru liczącego n elementów, wyboru k razy jednego elementu na zasadzie losowania ze zwracaniem można dokonać na n^k sposobów.

Zadanie 1. Ile jest możliwych wyników w dwukrotnym rzucie kostką do gry?

Rozwiązanie.
Dwukrotny rzut kostką do gry można utożsamiać z dwukrotnym losowaniem jednej liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, przy czym za drugim razem można w szczególności wylosować liczbę, która była wylosowany za pierwszym razem. Jest to zatem losowanie ze zwracaniem. Zbiór źródłowy liczy 6 elementów, czyli n = 6, losujemy 2 razy, czyli k = 2. Ilość możliwych wyników $n^k=6^2=36$.

Zadanie 2. Ile jest możliwych wyników w ośmiokrotnym rzucie monetą?

Rozwiązanie.
Ośmiokrotny rzut monetą można utożsamiać z ośmiokrotnym losowaniem jednego elementu ze zbioru $\{O, R\}$, przy czym w kolejnym losowaniu będą pojawiać się elementy wylosowane wcześniej

(ze względu na ilość stron monety zarówno orzeł jak i reszka muszą pojawić się kilka razy). Jest to zatem losowanie ze zwracaniem. Zbiór źródłowy liczy 2 elementy, czyli n = 2, losujemy 8 razy, czyli k = 8. Ilość możliwych wyników $n^k = 2^8 = 256$.

Zadanie 3. Na ile sposobów można rozmieścić 14 książek na 3 półkach?

Rozwiązanie.
Umieszczenie książki na półce to inaczej wylosowanie tej książce numeru półki, na której zostanie postawiona, czyli wylosowanie jednej liczby ze zbioru $\{1, 2, 3\}$, przy czym w kolejnym losowaniu będą pojawiać się elementy wylosowane wcześniej (ze względu na ilość półek na jednej półce zostanie postawionych kilka książek). Jest to zatem losowanie ze zwracaniem. Zbiór źródłowy liczy 3 elementy, czyli n = 3, losujemy 14 razy, czyli k = 14. Ilość możliwych wyników $n^k = 3^{14}$.

Model V. Reguła mnożenia.
Twierdzenie. W kombinatoryce spójnik **i** zastępowany jest **działaniem mnożenia**.

Zadanie. Ile jest możliwych wyników w jednoczesnym rzucie kostką do gry i monetą?

Rozwiązanie.
W przypadku rzutu kostką do gry mamy 6 możliwych wyników, w przypadku rzutu monetą 2 możliwe wyniki. Ponieważ rzucamy kostką **i** monetą, więc ilość wszystkich możliwych wyników jest równa $6 \cdot 2 = 12$.

Zadanie 2. W klasie jest 13 dziewcząt i 16 chłopców. Ile można w tej klasie utworzyć par: chłopiec, dziewczyna?

Rozwiązanie.
Jednego chłopca w tej klasie można wybrać na 16 sposobów, zaś jedną dziewczynę na 13 sposobów. Ponieważ tworzymy parę chłopiec **i** dziewczyna, więc ilość takich par będzie równa $16 \cdot 13 = 208$.

Zadanie 3. Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych parzystych, których cyfry należą do zbioru $\{0, 1, 2, 7, 8, 9\}$?

Rozwiązanie.
Krok 1.
* cyfra setek - ponieważ liczba ma być trzycyfrowa, więc cyfra setek nie może być równa 0, czyli musi być to cyfra ze zbioru $\{1, 2, 7, 8, 9\}$;
* cyfra dziesiątek - może być dowolna, czyli pochodzić z całego danego zbioru cyfr $\{0, 1, 2, 7, 8, 9\}$;
* cyfra jedności - liczba ma być parzysta, czyli cyfra jedności musi być cyfrą ze zbioru $\{0, 2, 8\}$.

Krok 2. Z kroku 1 wynika, że cyfrę setek można wybrać na 5 sposobów, cyfrę dziesiątek na 6 sposobów, zaś cyfrę jedności na 3 sposoby. Ponieważ liczba naturalna trzycyfrowa składa się z cyfry setek **i** cyfry dziesiątek **i** cyfry jedności, zatem ilość takich liczb jest równa $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$.

Zadanie 4. Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 5, których cyfry różnią się między sobą i należą do zbioru $\{1, 2, 5, 8\}$?

Rozwiązanie.
Krok 1. Liczba naturalna jest podzielna przez 5 jeżeli jej ostatnią cyfrą jest albo 0 albo 5. Zatem w przypadku tego zadania analizę struktury cyfr powinniśmy zacząć od cyfry jedności:
* cyfra jedności - uwzględniając dany zbiór cyfr i warunek podzielności przez 5 musi być ona równa 5;
* cyfra dziesiątek - może być dowolna, ale różna od 5, gdyż cyfry liczby muszą różnić się między sobą;
* cyfra setek - może być dowolna (w danym zbiorze cyfr nie ma cyfry 0), ale różna od cyfry jedności

i cyfry dziesiątek, gdyż cyfry liczby muszą różnić się między sobą.

Krok 2. Z kroku 1 wynika, że cyfrę jedności można wybrać na 1 sposób, cyfrę dziesiątek na 3 sposoby, zaś cyfrę setek na 2 sposoby. Ponieważ liczba naturalna trzycyfrowa składa się z cyfry setek **i** cyfry dziesiątek **i** cyfry jedności, zatem ilość takich liczb jest równa $2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$.

Model VI. Reguła dodawania.

Twierdzenie. W kombinatoryce spójnik **lub** zastępowany jest **działaniem dodawania**. Również gdy **rozpatrujemy przypadki**, to aby obliczyć łączną ilość możliwości trzeba ilości możliwości z poszczególnych przypadków **dodać do siebie**.

Zadanie 1. Na półce stoi 8 książek przygodowych, 6 kryminałów i 5 bajek. Na ile sposobów można wziąć z półki dwie książki o różnej tematyce?

Rozwiązanie.

Krok 1. Ponieważ mamy 3 gatunki książek a bierzemy z półki dwie książki o różnej tematyce, więc musimy rozpatrzyć przypadki: przygodowa i kryminał, kryminał i bajki, przygodowa i bajki.

Krok 2. Ustalimy, na ile sposobów można z półki wziąć dwie książki o różnej, ale ustalonej tematyce:
* przygodowa **i** kryminał: $8 \cdot 6 = 48$ sposobów;
* kryminał **i** bajki: $6 \cdot 5 = 30$ sposobów;
* przygodowa i bajki: $8 \cdot 5 = 40$ sposobów.

Krok 3. Aby obliczyć łączną ilość możliwości, to zgodnie z powyższym twierdzeniem ilości możliwości z kolejnych przypadków należy dodać do siebie: $48 + 30 + 40 = 118$.

Zadanie 2. W klasie IA do kółka matematycznego należy 3 chłopców i 5 dziewcząt a w klasie IB 4 chłopców i 2 dziewczyny. Wybieramy jedną osobę z każdego kółka i para ta będzie reprezentować szkołę w konkursie matematycznym. Na ile sposobów można taką parę utworzyć, jeżeli ma to być para osób:

a) różnej płci;

b) tej samej płci?

Rozwiązanie.

Punkt a). Jeżeli ma ta być para osób różnej płci, to musi to być: dziewczyna z kółka z IA **i** chłopiec z kółka z IB **lub** chłopiec z kółka z IA **i** dziewczyna z kółka z IB. Ilość takich par zgodnie z powyższym twierdzeniem i twierdzeniem z modelu V jest równa: $5 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 26$.

Punkt b) Jeżeli ma ta być para osób tej samej płci, to musi to być: dziewczyna z kółka z IA **i** dziewczyna z kółka z IB **lub** chłopiec z kółka z IA **i** chłopiec z kółka z IB. Ilość takich par zgodnie z powyższym twierdzeniem i twierdzeniem z modelu V jest równa: $5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 22$.