Przykładowe zadania na kółko matematyczne dla uczniów gimnazjum

Zagadnienia, które uczeń powinien znać przy rozwiązywaniu opisanych zadań: zastosowanie równań w zadaniach tekstowych, funkcje i ich monotoniczność, podzielność liczb całkowitych z resztą i bez reszty, pojęcie średniej arytmetycznej, zastosowanie wzoru na sumę kolejnych liczb naturalnych

W zadaniach trudniejszych często korzystamy ze wzoru na sumę n kolejnych liczb naturalnych. Warto przedstawiać uczniom różne uzasadnianie tego wzoru, pozwolić im odkrywać piękno matematyki.

Oto wzór $1+2+3+\cdots+N=\frac{N(N+1)}{2}$

Uzasadnienie wzoru

Metoda 1. (Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia)

$(k+1)^2-k^2=(k+1-k)(k+1+k)=1\cdot(2k+1)=2k+1$

$(k+1)^2-k^2=(k^2+2k+1)-k^2=2k+1$

Dowód:

Korzystając ze wzoru

$(k+1)^2-k^2=2k+1$ i podstawiając za k kolejne liczby naturalne od 1 do N otrzymamy

$2^2-1^2=2\cdot1+1$

$3^2-2^2=2\cdot2+1$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$N^2-(N-1)^2=2\cdot(N-1)+1$

$(N+1)^2-N^2=2\cdot N+1$ dodając stronami otrzymamy

$(N+1)^2-1^2=2\cdot(1+2+\cdots+N)+N$

$(N+1)^2-(N+1)=2\cdot(1+2+\cdots+N)$

$(N+1)(N+1-1)=2\cdot(1+2+\cdots+N)$

$N\cdot(N+1)=2\cdot(1+2+\cdots+N)\rightarrow\frac{N(N+1)}{2}=1+2+\cdots+N.$

Metoda 2.

Ustawiamy w ciąg 100 kolejnych liczb naturalnych od najmniejszej do największej i od największej do najmniejszej, po czym dodajemy te liczby

1,2, … ,99,100 suma 100 liczb

100,99, … 2,1 suma 100 liczb

____

$101{,}101,\dots,101{,}101\rightarrow2\cdot(1+2+\cdots+100)=100\cdot101\rightarrow1+2+\cdots+100=\frac{100\cdot101}{2}$

Podstawiając za 100 liczbę N otrzymamy wzór $1+2+\cdots+N=\frac{N(N+1)}{2}$.

Metoda 3.

$t_1=1$ pierwsza liczba trójkątna

$t_2 = 1 + 2 = 3$ druga liczba trójkątna
$t_3 = 1 + 2 + 3 = 6$ trzecia liczba trójkątna
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$t_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ n-ta liczba trójkątna

Metoda 4

Można wzór uzasadniać z zadań o liczbie boków i przekątnych w n+1- kacie wypukłym, lub z zadań o liczbie powitań w zbiorze na przykład uczniów klasy.

Dowód

Dany jest wielokąt o n+1 bokach. Ponieważ liczba przekątnych w n- kacie liczymy ze wzoru $L(n) = \frac{n}{2} \cdot (n-3)$ więc $L(n+1) = \frac{n+1}{2}(n+1-3) = \frac{n+1}{2}(n-2)$.

Dodając do liczby boków liczbę przekątnych otrzymamy poszukiwany wzór.

Istotnie $n + 1 + \frac{n+1}{2} \cdot (n-2) = \frac{2(n+1)+(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(2+n-2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Zadania

1. Podczas suszenia drzewa straciły 24% masy i 20% objętości. O ile procent zmniejszyła się ich średnia gęstość?

   Propozycja rozwiązania:

   m-masa, V-objętość, d- gęstość

   $d = \frac{m}{V}$ - początkowa gęstość

   $$d_1 = \frac{100\%m - 24\%m}{100\%V - 20\%V} = \frac{76\%m}{80\%V} = \frac{38m}{40V} = \frac{19m}{20V} = \frac{95}{100}d = 95\%d$$

   $100\%d - 95\%d = 5\%d$

   Średnia gęstość zmniejszyła się o 5%

2. Dane jest sześć liczb całkowitych. Każda z czterech pierwszych jest średnią arytmetyczną dwóch następnych. Ostatnia liczba jest większa od przedostatniej o 48. O ile ostatnia liczba jest większa od pierwszej?

   Propozycja rozwiązania:

   $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$

   $$a_1 = \frac{a_2 + a_3}{2}$$
   $$a_2 = \frac{a_3 + a_4}{2}$$
   $$a_3 = \frac{a_4 + a_5}{2}$$
   $$a_4 = \frac{a_5 + a_6}{2}$$

   $a_6 = a_5 + 48$

   Z czwartego równania otrzymujemy $2a_4 = a_5 + a_6 = a_5 + a_5 + 48 = 2a_5 + 48$, dzieląc obustronnie przez 2 otrzymujemy (1) $a_4 = a_5 + 24$

   Z trzeciego równania otrzymujemy $2a_3 = a_4 + a_5 = a_5 + 24 + a_5 = 2a_5 + 24$, dzieląc obustronnie przez 2 mamy (2) $a_3 = a_5 + 12$

   Z drugiego równania otrzymujemy $2a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + 12 + a_5 + 24 = 2a_5 + 36$, dzieląc obustronnie przez 2 mamy (3) $a_2 = a_5 + 18$

   Z pierwszego równania otrzymujemy $2a_1 = a_2 + a_3 = a_5 + 18 + a_5 + 12 = 2a_5 + 30$, dzieląc obustronnie przez 2 otrzymujemy (4) $a_1 = a_5 + 15$.

Z (4) otrzymujemy (5) $a_5 = a_1 - 15$ i podstawiając do szóstego równania otrzymujemy rozwiązanie $a_6 = a_5 + 48 = a_1 - 15 + 48 = a_1 + 33$.
Ostatnia liczba jest większa od pierwszej o 33.

3. Na kółku matematycznym bierze udział 12 uczniów, wśród których są przynajmniej dwie dziewczynki. Na 8 marca chłopcy przynieśli w torebce 95 cukierków i rozdali dziewczynkom po równo. W torebce zostały 4 cukierki. Ile chłopców bierze udział w tym kółku.
   Propozycja rozwiązania:
   Metoda 1.
   95-4=91
   91=7*13+0, czyli 7 dziewczynek dostało po 13 cukierków. Wszystkich uczniów było, 12 zatem chłopców było dokładnie 5, gdyż 12-7=5.
   Metoda 2.
   91+4=95
   Szukamy liczby podzielnej bez reszty, d-dziewczynki, c-chłopcy.
   2d 10c $\leftrightarrow 91 = 2 \cdot 45 + 1$
   3d 9c $\leftrightarrow 91 = 3 \cdot 30 + 1$
   4d 8c $\leftrightarrow 91 = 4 \cdot 22 + 3$
   5d 7c $\leftrightarrow 91 = 5 \cdot 18 + 1$
   6d 6c $\leftrightarrow 91 = 6 \cdot 15 + 1$
   7d 5c $\leftrightarrow 91 = 7 \cdot 13 + 0$
   8d 4c $\leftrightarrow 91 = 8 \cdot 11 + 3$
   9d 3c $\leftrightarrow 91 = 9 \cdot 10 + 1$
   10d 2c $\leftrightarrow 91 = 10 \cdot 9 + 1$
   11d 1c $\leftrightarrow 91 = 11 \cdot 8 + 3$
   12d 0c $\leftrightarrow 91 = 12 \cdot 7 + 7$
   Ponieważ 91 ⋮ 7 bez reszty, zatem jest 7 dziewczynek i 12 chłopców
4. Jeśli dodatnią liczbę a podniesiemy do czwartej potęgi to zwiększy się trzykrotnie. Ile razy zwiększy się ta liczba, jeśli podniesiemy ją do dziesiątej potęgi?
   Propozycja rozwiązania:
   $a^4 = 3a \leftrightarrow a^3 = 3$
   $a^{10} = (a^3)^3 \cdot a = 3^3 \cdot a = 27 \cdot a$
   Liczba zwiększy się 27 razy.
5. Ile wynosi najmniejsza liczba naturalna N dodatnia, która ma następujące własności: 10N jest kwadratem a 22N sześcianem pewnej liczby naturalnej.
   Propozycja rozwiązania:
   $10N = a^2 \leftrightarrow a^2 ⋮ 10 \leftrightarrow a ⋮ 10 \leftrightarrow a = 10k, k\epsilon C \leftrightarrow 10N = 100k^2 \leftrightarrow N = 10k^2$
   $22N = b^3 \leftrightarrow 22 \cdot 10k^2 = b^3 \leftrightarrow b^3 ⋮ 22 \cdot 10 \leftrightarrow b ⋮ 22 \cdot 10 \leftrightarrow b = 22 \cdot 10l, l \in N$
   $22N = 22^3 \cdot 10^3 \cdot l^3 \leftrightarrow N = 22^2 \cdot 10^3 \cdot l^3$. Podstawmy $l = 1$, wtedy
   $N = 22^2 \cdot 10^3 = 484000$
   Najmniejszą liczbą naturalną o własnościach w zadaniu jest liczba 484000.

6. Dane jest siedem kolejnych liczb naturalnych. Suma dwóch pierwszych wynosi 99. Ile wynosi suma dwóch ostatnich?
   Propozycje rozwiązań:
   Metoda 1.

Skoro suma dwóch pierwszych wynosi 99, a są to kolejne dwie liczby, więc łatwo odgadnąć, że są to liczby 49 i 50.
Ustawmy te liczby
49,50,51,52,53,54,55.
Zatem suma dwóch ostatnich wynosi 54+55=109
Metoda 2.
$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ - kolejne liczby naturalne
$a_1 + a_2 = 99$ z treści zadania.
Zauważmy, że $a_7 = a_2 + 5, a_6 = a_1 + 5$.
Zatem $a_6 + a_7 = a_2 + 5 + a_1 + 5 = (a_1 + a_2) + 10 = 99 + 10 = 109$.
Metoda 3.
$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6$ - kolejne liczby naturalne.
Z treści zadania $n + n + 1 = 99 \leftrightarrow 2n = 98 \leftrightarrow n = 49$.
Zatem $n + 5 + n + 6 = 2n + 11 = 98 + 11 = 109$.

7. Rozwiązać równanie $2^x + 3^x = 97$.
Propozycja rozwiązania:
Zauważmy, że x=4 jest rozwiązaniem.
Sprawdzamy: $2^4 + 3^4 = 16 + 81 = 97$.
Należy udowodnić, że jest to jedyne rozwiązanie, czyli równanie nie ma innych rozwiązań.
Zauważmy, że funkcja $y = a^x$ jest rosnąca dla $a > 1$. Zatem funkcje $y_1 = 2^x, y_2 = 3^x$ są rosnące, więc funkcja $y = y_1 + y_2 = 2^x + 3^x$ rośnie, bo suma dwóch funkcji rosnących jest funkcją rosnącą. Istnieje liczba $x_0 = 4$ taka, że $f(x_0) = f(4) = 97$.
Jeśli $x < x_0$ to $f(x) < 97$, jeśli $x > x_0$ to $f(x) > 97$.

8. Dana jest funkcja $f: R \to R$ taka, że $f(x) - f(y) = y - x$. Wiadomo, że $f(1) = 1$.
Znaleźć $f(2015)$.
Propozycja rozwiązania:
Podstawiamy w równaniu x=2015, y=1. Otrzymujemy wówczas
$f(2015) - f(1) = 1 - 2015$
$f(2015) - 1 = -2014$
$f(2015) = -2013$.

9. O funkcji $f: R \to R$ wiadomo, że $f(2015) \neq 0$, oraz że dla dowolnych x,y zachodzi równanie $f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$. Znaleźć $f(100500)$.
Propozycja rozwiązania:
Podstawienie 1: $x = 2015, y = 0$. Otrzymujemy
$f(2015) \cdot f(0) = f(2015 - 0)$
$f(2015) \cdot f(0) = f(2015) /: f(2015)$

$f(0) = 1$.

Podstawienie 2: $y = x$. Wtedy

$f(x) \cdot f(x) = f(x - x)$

$f^2(x) = f(0) = 1$. Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej x albo $f(x) = 1$ albo $f(x) = -1$.

Podstawienie 3: $y = \frac{x}{2}$, wtedy

$f(x)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(x-\frac{x}{2}\right)=f(\frac{x}{2})$. Z poprzednich rozważań wynika, że

$f\left(\frac{x}{2}\right)=1$ lub $f\left(\frac{x}{2}\right)=-1$. Zatem wystarczy równanie $f(x)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)=f(\frac{x}{2})$ podzielić

obustronnie przez $f(\frac{x}{2})$. Otrzymamy wówczas $f(x)=1$, więc $f(100500)=1$.

10. O trójmianie kwadratowym $f(x)=ax^2+bx+c$ wiadomo, że $f(c)=3$ a $f\left(\frac{1}{a}\right)=8$.
    Znaleźć $a\cdot c$.
    Propozycja rozwiązania:
    $f(c)=ac^2+bc+c=ac\left(c+\frac{b}{a}+\frac{1}{a}\right)=acf(\frac{1}{a})$.
    Istotnie $f\left(\frac{1}{a}\right)=a\cdot\frac{1}{a^2}+b\cdot\frac{1}{a}+c=c+\frac{b}{a}+\frac{1}{a}$.
    Dzieląc równanie $f(c)=acf(\frac{1}{a})$ obustronnie przez $f(\frac{1}{a})$ otrzymujemy
    $a\cdot c=\frac{f(c)}{f(\frac{1}{a})}=\frac{3}{8}=0{,}375$.
11. Znaleźć najmniejszą wartość funkcji $f(x)=x^2+2x-3$.
    Propozycja rozwiązania:
    Zapisujemy funkcję sprowadzając do pełnego kwadratu, korzystając ze wzoru na kwadrat sumy $f(x)=(x+1)^2-4$. Ponieważ $(x+1)$^2 ≥ 0 więc $f(x)\geq -4$.
    Ponieważ $f(-1)=-4$ więc najmniejsza wartość funkcji $f(x)=-4$.
12. Na taśmie papieru wypisano liczby naturalne $1,2,3,\ldots N$. Taśmę rozcięto na pięć części i znaleziono średnie arytmetyczne liczb każdej z części. Otrzymano liczby
    $8;\ 20,5;\ 38; 125{,}5; 213$ w pewnym porządku. Znaleźć N.
    Propozycja rozwiązania:
    $\frac{1+2+\cdots+(k-1)+k}{k}=8\leftrightarrow\frac{k\cdot(k+1)}{2\cdot k}=8\leftrightarrow k+1=16\leftrightarrow k=15$ - 1 część: 1-15
    $\frac{16+17+\cdots+m}{m-15}=\frac{(m-15)\cdot(m+16)}{2\cdot(m-15)}=20{,}5\leftrightarrow m+16=41\leftrightarrow m=25$ - 2 część: 16-25
    $\frac{26+27+\cdots+r}{r-25}=38\leftrightarrow\frac{(r-25)(r+26)}{2\cdot(r-25)}=38\leftrightarrow r+26=76\leftrightarrow r=50$ - 3 część: 26-50
    $\frac{51+52+\cdots+s}{s-50}=125{,}5\leftrightarrow\frac{(s-50)\cdot(s+51)}{2\cdot(s-50)}=125{,}5\leftrightarrow s+51=251\leftrightarrow s=200$ -4 część: 51-200
    $\frac{201+202+\cdots+N}{N-200}=213\leftrightarrow\frac{(N-200)\cdot(N+201)}{2\cdot(N-200)}=213\leftrightarrow N+201=426$ - 5 część: 201-225

    $\leftrightarrow N=225$.
    N=225
13. Adam wypisał w rzędzie wszystkie liczby całkowite od 1 do 14 w dowolnej kolejności. Dla każdej pary sąsiednich liczb znalazł średnią arytmetyczną i dodał do siebie otrzymane 13 liczb. Jaką największą sumę mógł uzyskać?
    Propozycja rozwiązania:
    Ustawmy liczby $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12},a_{13},a_{14}$
    Korzystamy ze średniej arytmetycznej
    $\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\frac{a_4+a_5}{2}+\frac{a_5+a_6}{2}+\frac{a_6+a_7}{2}+\frac{a_7+a_8}{2}+\cdots+\frac{a_{13}+a_{14}}{2}$.
    Sumę tych liczb te możemy zapisać w postaci

$$\frac{a_1}{2} + a_2 + a_3 + \cdots + a_{13} + \frac{a_{14}}{2} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{14}) - \frac{a_1 + a_{14}}{2} = \frac{14 \cdot 15}{2} - \frac{1+2}{2}$$
$$= 7 \cdot 15 - 1{,}5 = 105 - 1{,}5 = 103{,}5$$

Zauważmy, że suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_{14} \to MAX$ jest największa wtedy, gdy $\frac{a_1+a_{14}}{2} \to MIN$ jest najmniejsza.
Największa suma to 103,5

14. Ile istnieje różnych liczb sześciocyfrowych podzielnych przez 5?
Propozycja rozwiązania
Jeśli liczba jest podzielna przez 5 to jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5.
Na pozycji pierwszej może być 9 cyfr spośród $\{1,2, \dots ,9\}$ czyli 9 możliwości.
Na pozycjach drugiej, trzeciej, czwartej i piątej wybieramy cyfry spośród $\{0,1, \dots ,9\}$ czyli $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$ możliwości.
Na pozycji szóstej wybieramy cyfry spośród $\{0,5\}$ czyli dwie możliwości.
Z zasady mnożenia liczba różnych liczb sześciocyfrowych podzielnych przez 5 wynosi $9 \cdot 10^4 \cdot 2 = 18 \cdot 10000 = 180000$.

15. W pewnym mieście jest 30 miast, przy czym każde miasto jest połączone z innym miastem drogą. Jaka jest największa liczba dróg, które można zamknąć na remont, tak, aby z każdego miasta dostać się do innego?
Propozycja rozwiązania:
2 miasta -1 droga $1 = \frac{2 \cdot 1}{2}$
3 miasta - 3 drogi $3 = \frac{3 \cdot 2}{2}$
4 miasta - 6 dróg $6 = \frac{4 \cdot 3}{2}$
5 miast - 10 dróg $10 = \frac{5 \cdot 4}{2}$
$AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE$ - 10 dróg
30 miast - x dróg $x = \frac{30 \cdot 29}{2} = 15 \cdot 29 = 435$ dróg
Wystarczy zostawić 29 dróg (wszystkie drogi z pewnego miasta do innych miast).
Można zamknąć $435 - 29 = 406$ dróg.
406 dróg
Wniosek: z N miast można poprowadzić dokładnie
$\frac{N(N-1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + (N-1)$ dróg, czyli jest to suma kolejnych (N-1) liczb naturalnych.

Z przedstawionych propozycji zadań wynika, że w pracy z uczniami uzdolnionymi matematycznie warto nie tylko uczyć ich dowodzenia pewnych faktów z matematyki elementarnej, lecz również rozwiązywania innych zadań elementarnych wymagających pomysłowości oraz logicznego myślenia.

Opracowanie: Zbigniew Stebel