Uogólnione wzory Viete'a - praca z uczniem uzdolnionym matematycznie

Pracując z uczniem uzdolnionym matematycznie należy oczywiście postawić sobie określone cele takiej pracy. Przeważnie cele te to osiągnięcie przez ucznia jak najlepszych wyników w konkursach matematycznych. Mój główny cel w pracy z takimi uczniami to wykształcenie u nich umiejętności rozwiązywania złożonych zadań matematycznych z jednoczesnym doborem najbardziej "eleganckiej" metody rozwiązania takich zadań powiązanej z ewentualnym uogólnieniem postawionego problemu dającym możliwość uczniowi kreatywnego podejścia do zagadnienia.

Postawmy uczniowi na początek następujący problem:

Zadanie 1. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = -2x^2 + bx + c$ są liczby 2 i –7. Oblicz wartość współczynnika b oraz c.

Uczeń powinien wskazać przynajmniej 3 metody rozwiązania tego problemu:
a) ułożenie układu równań liniowych z niewiadomymi b oraz c;
b) wykorzystanie postaci iloczynowej funkcji kwadratowej;
c) wykorzystanie wzorów Viete'a

i ustalić, że b = -10, c = 28.

Po ustaleniu wartości współczynników b oraz c postawmy uczniowi następny problem:

Zadanie 2. Funkcja kwadratowa $y = -2x^2 + bx + c$ dla argumentów 2 i –7 przyjmuje wartość 5. Oblicz wartość współczynnika b oraz c.

Uczeń powinien zauważyć, że skoro wykres funkcji kwadratowej jest figurą osiowo symetryczną, to dla liczb 2 i –7 prawdziwy będzie wzór Viete'a: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, gdzie teraz x_1, x_2 to niekoniecznie miejsca zerowe, lecz argumenty, dla których funkcja kwadratowa przyjmuje jednakową wartość. Stąd dostajemy ponownie b = -10 i układając odpowiednie równanie z niewiadomą c wnioskujemy, że c = 33.

Po rozwiązaniu zadań 1 i 2 uogólnijmy jeszcze bardziej problem zawarty w treści tych zadań:

Zadanie 3. Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$ dla argumentów t_1 oraz t_2 przyjmuje wartość y_0. Określ zależność pomiędzy argumentami t_1 i t_2 a współczynnikami a, b, c i wartością y_0 analogiczne do wzorów Viete'a w przypadku gdy $y_0 = 0$. Ustal warunek stosowalności tych wzorów.

Zacznijmy od podania warunku gwarantującego przyjmowanie przez funkcję kwadratową ustalonej wartości y_0.
W przypadku, gdyby uczeń miał problem z rozwiązaniem tego zagadnienia należy zasugerować mu wykorzystanie postaci kanonicznej funkcji kwadratowej, przekształcenie jej do postaci: $\frac{y_0 - q}{a} = (x - p)^2$
i wywnioskowanie, że skoro prawa strona powyższej równości jest liczbą nieujemną to musi zachodzić warunek:

$$\frac{y_0 - q}{a} \geq 0 \qquad (1)$$

a po zastosowaniu wzoru na drugą współrzędną wierzchołka wykresu funkcji kwadratowej, warunek równoważny:

$$4ay_0 + \Delta \geq 0 \quad (2)$$

Po ustaleniu powyższych warunków należy przejść do ostatecznego rozwiązania zadania 3. Wzory Viete'a łatwo można uzyskać z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej z jednoczesnym wykorzystaniem zasady równości dwóch wielomianów. Zatem wiedząc, że funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2+bx+c$ dla argumentów t_1 oraz t_2 przyjmuje wartość y_0, można zasugerować uczniowi podanie wzoru funkcji kwadratowej, dla której liczby t_1 oraz t_2 byłyby miejscami zerowymi a następnie zapisanie takiej funkcji w postaci iloczynowej.
Funkcją taką byłoby $g(x)=f(x)-y_0$ i z faktu, że wtedy $g(x)=a(x-t_1)(x-t_2)$ uczeń powinien otrzymać zależność

$$f(x)=a(x-t_1)(x-t_2)+y_0$$

czyli uogólnienie postaci iloczynowej funkcji kwadratowej.

Następnie po uproszczeniu prawej strony powyższej równości i wykorzystaniu równości wielomianów otrzymać zależności:

$$t_1+t_2=\frac{-b}{a} \quad (3)$$

$$t_1\cdot t_2=\frac{c-y_0}{a} \quad (4)$$

czyli uogólnienie wzorów Viete'a.

Można również zaproponować uczniowi wyprowadzenie z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej wzorów na argumenty t_1 oraz t_2, dla których funkcja ta przyjmuje ustaloną wartość y_0 a następnie z tych wzorów zależności (3) i (4).

Aby pokazać zastosowanie zależności (3) i (4) do rozwiązywania problemów matematycznych, można wykorzystać po przeredagowaniu szereg zadań znajdujących się w różnych zbiorach zadań do szkół średnich dotyczących wzorów Viete'a jak na przykład:

Zadanie 4. Wyznacz takie wartości parametru m, że argumenty, dla których funkcja kwadratowa $y=x^2+(m-3)x+2m+1$ przyjmuje wartość $-\frac{37}{4}$ są liczbami jednakowych znaków.

Najpierw wykorzystując warunek (2) ustalamy te wartości parametru m, dla których powyższa funkcja kwadratowa przyjmuje wartość $-\frac{37}{4}$:

$4ay_0+\Delta=-37+(m-3)^2-4(2m+1)=m^2-14m-32\geq 0$.
Rozwiązując otrzymaną nierówność kwadratową dostajemy: $m\in(-\infty;-2>\cup<16;\infty)$.

Ponieważ argumenty, dla których ta funkcja kwadratowa przyjmuje wartość $-\frac{37}{4}$ mają być liczbami jednakowych znaków, więc z warunku (4) wynika, że musi być spełniona nierówność $\frac{c-y_0}{a}>0$:

$\frac{c-y_0}{a}=2m+1+\frac{37}{4}=2m+\frac{41}{4}>0$ czyli $m>-\frac{41}{8}$.

Ostateczne rozwiązanie zadania to: $m\in\left(-\frac{41}{8};-2>\cup<16;\infty\right)$.